# L'esplorazione della mappa logistica con Geogebra

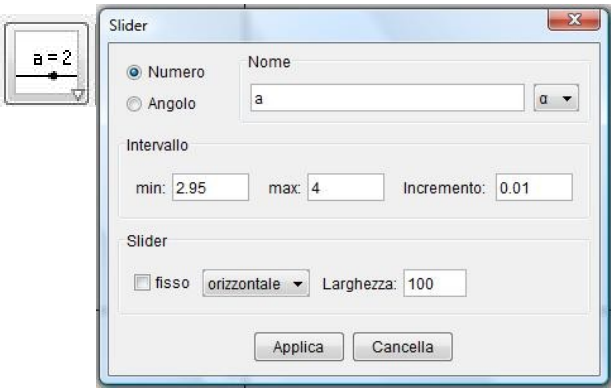
## *Costruzione della traiettoria*

La mappa logistica è definita dalla funzione di secondo grado: $f(x)=a(x-x^2)$ ,

che porta alla seguente iterazione: $x_{n+1}=a(x_n-x_n^2)$ .

Per realizzare il diagramma della traiettoria con Geogebra dobbiamo:

1. **Creare tre variabili:**
   *a:* valore del parametro *a* della funzione;
   *c*: valore iniziale $x_0$ della iterazione;
   *n*: numero di volte che si intende iterare la funzione;
   Lo facciamo utilizzando lo strumento ***Slider***, che consiste in una linea dotata di cursore; trascinando il cursore si cambia il valore della variabile.
   Premi il pulsante ***Slider*** e quindi imposta i valori




   Fai lo stesso con *c* (Intervallo: 0-1; Incremento: 0.01) e *n* (Intervallo: 1-1000; Incremento: 1).

2. **Creare la funzione logistica** $f(x)=a(x-x^2)$ :
   nella barra di ***Inserimento*** (in fondo alla finestra) scrivi f(x)=a*(x-x^2) e premi Invio. La fuzione viene rappresentata nel diagramma cartesiano.

   Zoomiamo e centriamo in modo che il grafico riempia la finestra.

3. **Creare la successione dei punti da disegnare**:
   Per realizzare le iterazioni, Geogebra mette a disposizione un comando apposito
   **Iterazione[ *f*, $x_0$, *n*]**
   che itera *n* volte la funzione *f* a partire dal valore $x_0$ (se *n* = 0 ritorna $x_0$).
   La traiettoria, che dobbiamo calcolare, è costituita dai punti:
   (0, Iterazione[ *f*, *c*, *0*]), (1, Iterazione[ *f*, *c*, *1*]), …, (n, Iterazione[ *f*, *c*, *n*])
   Possiamo costruire la lista dei punti utilizzando il comando di Geogebra
   **Successione [*espressione*, *variabile*, *valore_iniziale*, *valore_finale*, *passo*]**
   che genera una lista di oggetti calcolando ***espressione***, assegnando alla ***variabile*** tutti i valori a partire da ***valore_iniziale*** fino a ***valore_finale*** con il ***passo*** dato (se il passo è 1 può essere omesso).
   Nel nostro caso:
   *variabile* = i
   *espressione* = (i, Iterazione[ *f*, *c*, i])   (punto, cioè una coppia ordinata di numeri)
   *valore_iniziale = 0*
   *valore_finale* = n
   *passo* = 1 (non lo scriviamo)
   Nella barra di ***Inserimento*** creiamo la lista L costituiti dai punti della traiettoria scrivendo il comando:
   L = Successione[(i, Iterazione[f, c,i]), i, 0, n]

4. **Creare la successione dei segmenti che collegano i punti.**
   Si crea un'altra lista M utilizzando il comando successione per leggere gli elementi della lista L e il comando ***Segmento*** per collegare i punti:

   M = Successione[Segmento[Elemento[L, i], Elemento[L, i + 1]], i, 1, Lunghezza[L] – 1]

5. **Salvare il file** con il nome ***traiettoriaLogistica***.

## *Costruzione del diagramma a scala*

Per realizzare i diagramma a scala conviene modificare il file precedente per risparmiare alcuni passaggi.

1. **Salviamo il file precedente con il nome *diagScalaLogistica***
2. **Cancelliamo le liste L e M**
   basta cliccarci sopre e premere Canc
3. **Creiamo la bisettrice** del 1° e 3° quadrante: g(x) = x.
4. **Creiamo la successione dei punti da disegnare**:

| *x* | *y* | |
|---|---|---|
| $x_0 = c$ | $x_1 = f(x_0)$ | sul grafico di $f(x)=a(x-x^2)$ |
| $x_1$ | $x_1$ | sulla bisettrice |
| $x_1$ | $x_2 = f(x_1)$ | |
| $x_2$ | $x_2$ | |
| $x_2$ | $x_3 = f(x_2)$ | |
| ... | ... | |

   Utilizzando il comando ***Iterazione*** la lista dei punti diventa:

| *x* | *y* |
|---|---|
| Iterazione[ f, c, 0] | Iterazione[ f, c, 1] |
| Iterazione[ f, c, 1] | Iterazione[ f, c, 1] |
| Iterazione[ f, c, 1] | Iterazione[ f, c, 2] |
| Iterazione[ f, c, 2] | Iterazione[ f, c, 2] |
| Iterazione[ f, c, 2] | Iterazione[ f, c, 3] |
| ... | ... |

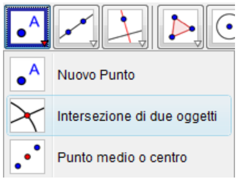
   Per generare la lista L di *n* punti con le coordinate sopre descritte usiamo nuovamente il comando ***Successione***:
   L = Successione[(Iterazione[f, c, … ], Iterazione[f, c, … ]), i, 1, n]

   ***Che cosa deve essere scritto al posto dei puntini per generare la corretta lista dei punti?***
   ***(Devi trovare la formula corretta in funzione di i che dà i valori della tabella).***
   Una volta scritto il comando nella barra di inserimento e premuto Invio, appariranno i punti.

5. **Creiamo la successione dei segmenti che collegano i punti.**
   Come nel folio precedente colleghiamo i punti della lista L con il comando ***Segmento***:

   M = Successione[Segmento[Elemento[L, i], Elemento[L, i + 1]], i, 1, Lunghezza[L] – 1]

6. **Disegnamo la tangente nel punto fisso**
   Per analizzare il comportamenteo delle iterazioni è utile considerare la tangente alla parabola nel punto fisso diverso dall'origine.
   Creiamo prima i punti di intersezione tra la retta e la parabola con il comando ***Intersezione di due oggetti,*** quindi disegnamo la tangente con il comando ***Tangenti:***





## *Visualizzazione della seconda iterata*

La seconda iterata è la funzione che si ottiene componendo la funzione originale a se stessa. Nel caso della logistica, è una funzione di quarto grado:

$$h(x)=f(f(x))=af(x)(1-f(x))=aax(1-x)(1-ax(a-x))=a^2x(1-x)(1-ax(a-x))$$

Per disegnarla utilizziamo e modifichiamo il foglio precedente per risparmiare tempo:

1. Salviamo il foglio con il nome ***secondaIterLogistica***.
2. Creiamo la nuova funzione: h(x) = f(f(x)).
3. Modifichiamo la lista L in modo che calcoli le iterate della funzione h:
   - clic con il pulsante destro su L;
   - Proprietà;
   - sostituire f con h.
4. Cancelliamo la tangente al grafico di f che non serve.

## *Esplorazione della mappa*

Analizziamo ora il comportamento della mappa al variare del parametro *a*. Teniamo aperti i tre fogli creati in precedenza sul Desktop, affiancati o sovrapposti se lo schermo è troppo piccolo, per poter confrontare i tre grafici. Inizialmente impostiamo un numero *n* non molto elevato di iterazioni, in modo da avere una risposta del computer più veloce; se rimane qualche dubbio sul comportamento asintotico (converge, non converge, è periodico …) aumentatene il valore con lo slider.

1. ***a = 0.95***
   Qual è l'andamento della traiettoria? Converge? Variate il valore iniziale *c*? Cambia qualcosa?

2. ***a = 3***
   Aumentiamo gradualmente il valore di *a* fino ad arrivare a 3
   Si modifica qualcosa? Cosa succede per *a* = 3? Quale andamento sembra avere la traiettoria?
   Osserviamo l'equazione della tangente al grafico nel punto fisso: cosa si può notare?
   Analizziamo ora il grafico della seconda iterata. Esso interseca la bisettrice negli stessi punti della parabola, quindi i punti fissi della prima iterata sono anche punti fissi della seconda. Per *a*=3 quale andamento ha il grafico della seconda iterata in un intorno del punto fisso? Quale andamento aveva per valori di a inferiori a 3?

3. ***a > 3***
   Aumenta ora di poco il valore di *a* (es. da 3.01 a 3.10) e ripeti l'analisi precedente.
   In particolare osserva cosa succede nel diagramma della seconda iterata: quanti punti fissi ci sono? Quali sono attrattivi e quali repulsivi? Che relazione c'è tra il diagramma della seconda iterata e l'andamento della traiettoria?

4. ***a = 3.45***
   Aumenta il valore di *a* fino a 3.44 varia qualcosa?
   Osserva il comportamento per *a* = 3.44 e *a* = 3.45 cosa cambia? Che tipo di traiettoria si ha per *a* = 3.45 e per i valori immediatamente successivi?
   Quale iterata della funzione *f* vorresti rappresentare per capire la causa del cambiamento?

5. ***a > 3.45***
   Aumenta ora gradualmente il valore di a fino a trovare i prossimo raddoppio del periodo: *a* = ….
   Aumenta ancora *a* fino a 4: cosa succede? Riesci a identificare ancora un periodo per la traiettoria?

## *Il diagramma delle orbite*

Per visualizzare in modo sintetico il comportamento della mappa in funzione del parametro *a* e, in particolare, i raddoppi del periodo e la transizione verso un comportamento caotico nel quale non si riesce a distinguere un periodo, si costrusice un diagramma, chiamato diagramma delle orbite o diagramma di biforcazione, nel quale si rappresentano:

sull asse delle ascisse il valore di a;

sull'asse delle ordinate il valore o i valori ai quali tende la traiettoria per il corrispondente valore di a. Se la traiettoria converge ci sarà solamente un punto, se oscilla tra due valori (periodo 2) ci saranno due punti, se il periodo è di ordine *k* ci saranno *k* punti e così via.

Disegnare il diagramma delle orbite con Geogebra è complicato, preferiamo usare un altro software matematico molto potente WXMaxima che mette a disposizione in uno dei suoi pacchetti il comando che disegna il diagramma delle orbite. WXMaxima è l'interfaccia grafica di Maxima, un programma di calcolo simbolico e numerico molto potente, Open Source, scaricabile liberamente ed utilizzabile secondo la licenza GPL senza il pagamento di nessuna licenza d'uso.

Apriamo WXMaxima e inseriamo le seguenti istruzioni:

```
load("dynamics");
ainiz:2.5;
afin:4;
passo:(afin-ainiz)/300;
orbits(a*y*(1-y),0.4,200,300,[a,ainiz,afin,passo],[style,[points,0.2,1,1]]);
```