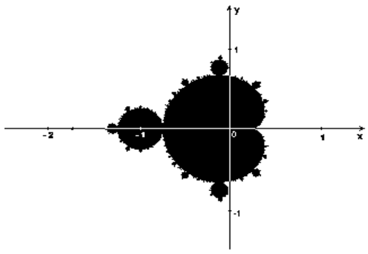
Progetto Lauree Scientifiche

“Esplorando il Caos”



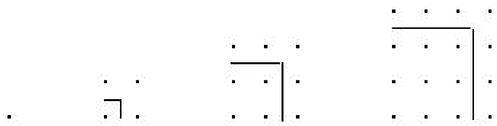
Successioni definite per ricorrenza

Proposte di esercizi

1. La successione dei quadrati

La successione dei quadrati è semplice da ottenere: $a_n = n^2$. Prova ad esprimerla in forma ricorsiva.

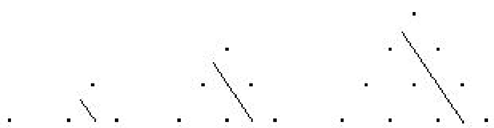
I numeri quadrati sono un esempio particolare di quelli che i Greci chiamavano numeri figurati (o poligonali), cioè numeri che rappresentati graficamente come un gruppo di punti possono formare una figura geometrica regolare. Infatti possono essere disposti in modo da formare un quadrato:



Ad ogni poligono regolare si può associare una diversa successione di numeri, vediamone alcune.

2. I numeri triangolari

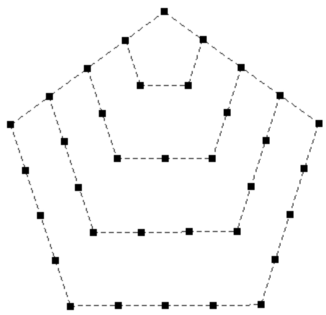
Sono quei numeri che corrispondono agli insiemi di punti che possono essere disposti in modo da rappresentare un triangolo regolare



Posto che il primo numero della successione è 1 ($a_1 = 1$), esprimi la successione in forma ricorsiva.

Prova ora ad esprimere la successione in funzione di *n*.

3. I numeri pentagonali



Con essi si possono rappresentare pentagoni regolari.

Prova a ricavarne la successione: $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 12$, …

Trova prima una formula ricorsiva e poi l’espressione in funzione di *n*.

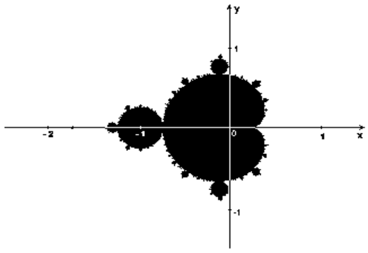
4. Una successione ricorsiva lineare

Considera la seguente successione ricorsiva:

$a_1 = 3$

$a_n = 4a_{n-1}$

Trova l’espressione del *n*-simo termine in funzione di *n* .



5. Una successione ricorsiva lineare più complicata

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

A differenza di prima ogni termine dipende dai due precedenti e pertanto devo assegnare il valore iniziale ai primi due termini della successione.

Ipotizziamo che esista una soluzione del tipo: $a_n = c \cdot h^n$

con *h* e *c* da determinarsi in base alla relazione ricorsiva ed alle condizioni iniziali.

1. Prova a calcolare *h*, applicando solo la relazione ricorsiva.
2. Quanti valori di *h* ottieni?
3. Considera uno dei due valori trovati, determina il valore di *c* in modo da soddisfare le condizioni iniziali ($a_1 = 1$, $a_2 = 3$). E’ possibile?
4. Come puoi combinare il due valori di *h* ottenuti per trovare una soluzione che soddisfi anche le condizioni iniziali?

6. La successione di Fibonacci

La sequenza prende il nome dal matematico pisano del XIII secolo Leonardo Fibonacci e i termini di questa successione sono chiamati **numeri di Fibonacci**. L'intento di Fibonacci era quello di trovare una legge che descrivesse la crescita di una popolazione di conigli, assumendo che :

- la popolazione iniziale è composta da una coppia di conigli;
- ogni coppia diventa produttiva a partire dal secondo mese di vita;
- ogni coppia fertile dà alla luce una nuova coppia di conigli ogni mese.

Prova a trovare un espressione ricorsiva della successione di Fibonacci:

$$F_1 = \ldots$$
$$F_2 = \ldots$$
$$F_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Troverai una successione dello stesso tipo dell’esercizio precedente. Applicando lo stesso metodo si trova una formula sorprendente:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

In cui compare la *sezione aurea* $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ e l’opposto del suo reciproco $\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Grazie a questa relazione si può dimostrare che il limite del rapporto tra due termini successivi della successione di Fibonacci tende alla sezione aurea:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$$