VII GARA NAZIONALE A SQUADRE

Semifinale B – 5 maggio 2006

Istruzioni Generali

- ⋆ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- ⋆ Se la quantità richiesta non è un numero intero, ove non altrimenti indicato, si indichi la sua parte intera.
- ⋆ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ⋆ Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999, se ne indichino le ultime quattro cifre.

Scadenze importanti

- ⋆ **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- ⋆ **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo.
- ⋆ **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

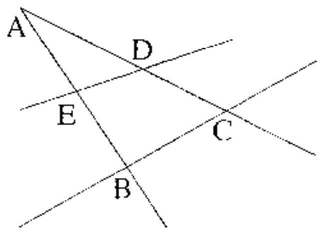
1. Impostori svelati

Spesso ci si chiede come sia possibile riconoscere un matemago da un *matebbano*, cioè qualcuno a digiuno di matemagia. Il metodo è molto semplice! Provate a chiedere a un matebbano il seguente quesito.

In un triangolo ABC, retto in A, siano $AB = 21$ e $AC = 20$. Sia P l'intersezione tra l'altezza da A e la mediana da B. Determinare AP. Rispondere con la somma del numeratore e del denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

2. La capanna del guardacaccia

Hardy, Ron e Hermita amano trascorrere il pomeriggio davanti a una tazza fumante di tè in compagnia del guardacaccia. In queste occasioni la meticolosa Hermita ha sempre un nuovo problema di geomanzia, la sua materia preferita, da proporre agli amici.



I punti B, C, D, E giacciono sulla stessa circonferenza e sia A l'intersezione tra la retta BE e la retta CD (vedere figura). Sappiamo che $DE = AE$ e che $\widehat{ACB} = 50°$. Determinare $\widehat{DAE}$.

3. Successioni

Per una strana, matemagica coincidenza, nell'Evo moderno il direttore della Scuola Matemagica Superiore è stato nominato solo negli anni con la seguente peculiare proprietà: sono stati tutti gli anni N tra il 1492 e il 2006 per cui l'equazione $x^4 - y^4 = N$ ha soluzione negli interi positivi. Qual è la somma di questi anni?

4. La pozione Polifattore

La preparazione di certe pozioni è lunga ed elaborata, impresa solo per matemaghi esperti. L'abile Hermita è intenta a preparare la pozione Polifattore: essa richiede un certo numero di sanguisughe. Tale numero P è il prodotto di tutti i divisori positivi di 1800000 (incluso lo stesso 1800000). Con quanti zeri termina P?

5. La prima prova del torneo

Finalmente è giunto il gran giorno del torneo TreAngoli, che mette a confronto i migliori studenti di matemagia. Ecco la prima prova: trovare quante sono le coppie (a,b) di interi positivi tali che $a \leq 246$ e $\frac{a}{2} < b < \frac{2}{3}a$.

6. Alla lezione di divinazione

Hardy e Ron sono stati di nuovo pizzicati a chiacchierare durante la noiosa lezione di divinazione. Per punizione devono risolvere un esercizio: data la sequenza 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ..., formata da tutti gli interi positivi che non sono né quadrati né cubi di altri interi, vaticinare il 9000-esimo termine.

7. La seconda prova del torneo
I concorrenti al temibile torneo TreAngoli che hanno superato la prima prova si trovano ora ad affrontare la seconda. Devono trovare il più grande numero di esattamente 4 cifre tale che il suo quadrato termini con lo stesso numero di 4 cifre.

8. L'ultima prova del torneo
La fine del torneo TreAngoli è vicina, e presto si saprà il nome del matemago supremo, colui che sarà ricordato per le ere a venire. Solo un prova separa Hardy dal meritato trionfo: determinare quanto vale la somma dei quadrati delle radici del polinomio $x^3 - 89x^2 + 72x - 11$.

9. La costruzione del malandrino
L'unico modo per rendere visibile ciò che è stato scritto sulla costruzione del malandrino consiste nel risolvere un problema geomantico: in un triangolo ABC le lunghezze dei lati uscenti da A sono 799 e 1123, e la mediana uscente da A ha lunghezza 799. Qual è la lunghezza di BC?

10. Selezione della rosa
Il Quamditch è uno sport che coniuga scatto, agilità e potenza tanto di pensiero che di azione. Per questo Hardy, capitano della squadra di Quamditch della casa di *Rapportaureo*, sottopone gli aspiranti matemaghi atleti alla seguente prova: mentre eseguono una tripla capriola carpiata, devono considerare tutte le coppie ordinate di interi positivi (a,b) tali che $a^2 + b^2 = 1885$. Qual è la somma dei diversi valori di a?

11. La giratempo
La valente Hermita è piuttosto confusa dall'uso della *Giratempo*, che le permette di viaggiare nel tempo. Dunque si ritrova costretta a tenere spesso d'occhio l'orologio. Sia N il numero di volte che, in 24 ore, la lancetta dei secondi sorpassa la lancetta dei minuti. Quanto vale N?

12. Agognata libertà
Come tutti i matemaghi sanno, un alfo domestico può riconquistare la sua libertà se riesce a risolvere un problema che gli pone il suo padrone. Recentemente un alfo si è visto chiedere Qual è il più grande numero intero di 4 cifre distinte tale che ogni sua cifra (ad eccezione della prima e dell'ultima) sia strettamente minore della media aritmetica delle due cifre adiacenti.

Qual è la risposta che restituisce la libertà all'alfo?

13. Il collezionista
Il professor Primon fa una strana collezione di manufatti di matemagia oscura. Si tratta di tetraedri regolari che hanno facce tutte colorate di un solo colore (diverso per ogni faccia), e i colori vengono scelti da una gamma di 16 colori diversi. Il professor Primon possiede già un elemento di questa collezione e ne compra un altro, poi torna a casa lo capovolge, lo ruota sulla base, e si accorge che in realta è un doppione. Quanti pezzi conta in totale la collezione (due pezzi ottenibili l'uno dall'altro mediante rotazioni, sono da considerarsi lo stesso)?

14. Distrazioni
Henri e *Smale* Perelman, i due fratelli più grandi di Ron, raramente seguono le lezioni e piuttosto si dedicano a inventare nuovi giochi. Oggi giocano a chi indovina per primo il seguente quesito: dire quante sono le frazioni $\frac{m}{n}$, ridotte ai minimi termini, tali che $0 < \frac{m}{n} < 1$ e per cui $m \cdot n = 18!$.

15. Alla lezione di geomanzia
Hardy e Hermita sono nel laboratorio di geomanzia, per esercitarsi a creare simboli magici. Partendo da una circonferenza su cui segnano sei punti equidistanti, Hermita propone di completare la figura unendo i sei punti a formare una stella di David, di area A. Hardy invece propone di unirli ad esagono, di area B. Per misurare la potenza dei due incantesimi, i due misurano le due aree. Dire quanto vale $320B/A$.